

Некоторые приемы решения задач типа 19 ЕГЭ

Белогородов Александр Николаевич

доцент кафедры математики УГАТУ, к.ф.-м.н.

1. В турнире играют 15 волейбольных команд, каждая команда играет со всеми остальными командами только один раз. Поскольку в волейболе нет ничьих, в каждом матче есть победитель. Команда считается выступившей хорошо, если она проиграла не более двух матчей. Найти наибольшее возможное число команд, выступивших хорошо?
2. В корзине 58 овощей. Средняя масса всех овощей составляет 1000г. Есть хотя бы два овоща с различной массой, при этом средняя масса овощей, масса каждого из которых менее 1000г, равна 976 г. Средняя масса овощей весом свыше 1000г составляет 1036г.
 - а) Могло ли быть поровну овощей массой больше 1000 г и меньше 1000г?
 - б) Могло ли быть в корзине ровно 12 овощей весом по 1000г?
 - в) Найти наименьшее значение массы овоща.
3. За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трех звезд. При этом, заряд аккумулятора планшета уменьшается на 9 пунктов при получении трех звезд, на 12 пунктов при получении двух звезд и на 15 пунктов при получении одной звезды. Витя прошел несколько уровней игры подряд.
 - а) Мог ли заряд аккумулятора уменьшаться ровно на 50 пунктов?
 - б) Сколько уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на 75 пунктов и суммарно было получено 11 звезд?
 - в) За пройденный уровень начисляется 7000 очков при получении трех звезд, 6000 – при получении двух звезд и 3000 – при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на 75 пунктов и суммарно было получено 11 звезд?

Ответ: а) нет; б) 6 уровней; в) 33000 очков максимально.
4. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{3}{10}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.
 - а) Могло ли быть в группе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 22 учащихся?

- б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 22 учащихся?
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительных условий (а и б)?

Ответ: а) да; б) 17 мальчиков; в) .

5. Некто должен был перемножить два двузначных числа (числа с нуля начинаться не могут). Вместо этого он просто приписал одно из чисел справа к другому, получив четырёхзначное число, которое оказалось в N раз (N — натуральное число) больше правильного результата.

- а) Могло ли N равняться 2?
б) Могло ли N равняться 10?
в) Каково наибольшее возможное значение N ?

Ответ: а) да, например, 13 и 52; б) нет; в) 3.

6. На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших из них равно 15.

- а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 3?
б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 9?
в) Пусть V - шестое по величине число, а S – среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S - V$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) $\frac{48}{11}$.

7. На доске написаны 30 различных натуральных чисел, каждое из которых либо является чётным, либо его десятичная запись оканчивается на 5. Сумма написанных чисел равна 800.

- а) Может ли на доске быть ровно 26 чётных чисел?
б) Может ли на доске ровно 20 чисел оканчиваться на 5?
в) Какое наибольшее количество чисел, оканчивающихся на 5 может быть на доске?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6 чисел максимально.

8. В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

- а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?

- б) Пусть есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?

- в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

Ответ: а) да, например, за 3 переливания дополнить из большей в меньшие до 48л;
б) нет, например, для случая: 1,1,1,1,1,1,8;
в) 25 переливаний.

9. На доске написаны числа 1,2,3, ..., 30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стертых на предыдущих ходах.

а) Приведите пример последовательности из 5 шагов.

б) Можно ли сделать 10 ходов?

в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Ответ: а) вычеркиваем: (1,10,11), (2,10,12), (3,8,13), (4,7,14), (5,6,15);

б) нет;

в) 6 ходов, пример: (1,12,13), (2,11,14), (3,10,15), (4,9,16), (5,8,17), (6,7,18).

10. а) Можно ли представить число 2019 в виде суммы двух различных натуральных чисел, имеющих одинаковую сумму цифр?

б) Можно ли представить число 199 в виде суммы двух различных натуральных чисел, имеющих одинаковую сумму цифр?

в) Найти наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел, имеющих одинаковую сумму цифр?

Ответ: а) да, например $2019 = 2004 + 15$;

б) нет;

в) 110.

11. Про натуральное пятизначное число N известно, что оно делится на 12, и сумма его цифр делится на 12.

а) Могут ли все пять цифр в записи числа N быть различными?

б) Найдите наименьшее возможное число N ;

в) Найдите наибольшее возможное число N ;

г) Какое наибольшее количество одинаковых цифр может содержаться в записи числа N ? Сколько всего таких чисел N (содержащих в своей записи наибольшее количество одинаковых цифр)?

Ответ: а) нет; б) 10056; в) 99972;

г) 4 одинаковых цифры.

12. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на 61).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Ответ: а) например, 92, 92, ..., 92, 26 – всего 33 числа;

б) нет;

в) 693, например, 91, 91, ..., 91, 58 – всего 33 числа.

13. Каждый из 24 студентов писал либо одну из двух, либо обе контрольные работы. За каждую контрольную мог получить от 0 до 20 баллов. По каждой из этих двух работ в отдельности вычислен средний балл у писавших – он оказался равен 12. Затем, каждый из студентов назвал свой наибольший балл (если студент писал только одну работу, то он назвал балл за нее) и среднее арифметическое всех таких баллов оказалось равным S .

а) Приведите пример, когда $S < 12$;

б) Могло ли ровно 20 студентов написать обе контрольные работы, если известно, что $S = 11$?

в) Какое наибольшее число студентов могло писать обе контрольные работы, если $S = 11$?

Ответ: а) два студента писали только первую к.р. на 4 балла, три студента – только вторую к.р. на 4 балла, один студент – обе к.р. на 0 баллов, 18 студентов – обе к.р. на 14 баллов. $S = 11$;

б) нет;

в) 19.

14. В группе одной из социальных сетей состоят одинаковое количество юношей и девушек. Оказалось, что к некоторому моменту времени каждый юноша отправил или 4 или 21 сообщение девушкам, причем и тех, и других юношей было не менее двух и они могли отправлять по несколько сообщений выбранным девушкам.

а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно по семь сообщений?

б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что у каждой из них одинаковое количество сообщений?

в) Если известно, что все девушки получили разное количество сообщений (возможно, что кто-то не получил сообщений совсем), то каково наибольшее возможное количество девушек в группе?

Ответ: а) да;

б) 17;

в) 41.

Дополнительные задачи

15. На доске написаны числа 2 и 3. За один ход разрешается заменить написанные на доске пару чисел \mathbf{a} и \mathbf{b} парой чисел $(2\mathbf{a}-1)$ и $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ или парой $(2\mathbf{b}-1)$ и $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить 3 и 5, либо 5 и 5).

а) Можно ли после нескольких ходов получить на доске число 10? б)

Может ли после 100 ходов на доске получиться число 200?

в) Сделано 2017 ходов, причем ни разу не было пары равных чисел. Какова наименьшая разность двух чисел в паре?

Ответ: а) да, например, $(2,3) \rightarrow (5,5) \rightarrow (9,10)$;

б) нет;

в) 2.

16. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их всевозможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в неубывающем порядке. Если какое-то число n , выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n , а остальные числа, равные n , стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

17. Натуральные числа \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} и \mathbf{d} удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа a , b , c и d , если выполнены условия $a + b + c + d = 16$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 32$.

б) Может ли быть так, что $a + b + c + d = 29$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 29$?

в) Пусть $a + b + c + d = 1400$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1400$. Найдите количество возможных значений числа \mathbf{a} .

18. На окружности некоторым образом расставлены все натуральные числа от 1 до 21 (каждое число ровно один раз). Для каждой пары соседних на окружности чисел найден модуль их разности.

а) Могло ли оказаться так, что все полученные модули разностей не меньше 11?

б) Могло ли оказаться так, что все полученные модули разностей не

меньше 10?

в) Помимо полученных разностей соседних чисел рассмотрены все пары чисел, стоящих через одно и подсчитаны все модули их разностей. Для какого наибольшего целого k можно так расставить числа, чтобы все модули разностей были не меньше k ?

- 19.** Из первых 22 натуральных чисел выбрали $2k$ различных чисел. Выбранные числа разбили на пары и подсчитали суммы чисел в каждой паре. Оказалось, что все полученные суммы различны и не превосходят числа 27.
- а) Могло ли оказаться так, что сумма всех $2k$ выбранных чисел равна 170 и в каждой паре одно из чисел в три раза больше другого?
 - б) Может ли число k быть равным 11?
 - в) Найти наибольшее возможное значение числа k .
- 20.** Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).
- а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?
 - б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 800?
 - в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 111?
- 21.** Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку - целое число от 0 до 12 включительно. Известно, что все оценки - разные числа. Один из способов оценки – найти среднее арифметическое всех оценок. Второй способ состоит в следующем: отбрасывается наибольшая и наименьшая оценки, а из оставшихся находится арифметическое среднее.
- а) Может ли разность оценок, найденных первым и вторым способом равняться $\frac{1}{25}$?
 - б) Может ли разность оценок, найденных первым и вторым способом равняться $\frac{1}{35}$?
 - в) Каково наибольшее возможное значение разности оценок, найденных первым и вторым способом?
- 22.** Решить в целых числах уравнение
- $$2^x - 15 = y^2.$$
- 23.** Найти все решения уравнения $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{1}{3}$, где $[x]$ – целая часть числа x , а $\{x\}$ – дробная часть числа.

24. Найти решения уравнений:

а) $[2x] = \{7x\}$;

б) $[2x] = 7x$;

в) $2x = \{7x\}$,

где $[x]$ – целая часть числа x , а $\{x\}$ – дробная часть числа.

25. $S(n)$ – сумма цифр натурального числа n .

а) Существует ли такое двузначное число, для которого выполняется условие $S(n) = S(2n)$?

б) Существует ли такое двузначное число, все цифры которого четны, и для которого выполняется условие $S(n) = S(2n)$?

в) Найдите количество трехзначных чисел, все цифры которых нечетны, и для которых выполняется условие $S(n) = S(2n)$.

Ответ: а) да, например, $n = 45$;

б) нет;

в) ?

26. а) Приведите пример такого натурального числа, что числа n^2 и $(n + 24)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 100.

б) Сколько существует трёхзначных чисел с указанным в пункте а) свойством?

в) Сколько существует двузначных чисел m , для каждого из которых существует ровно 36 трёхзначных чисел n , таких, что n^2 и $(n + m)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 100?

Ответ: а) $n = 13$;

б) ?;

в) ?

27. Из 26 последовательных нечетных чисел 1, 3, 5, ..., 51 выбрали 11 различных чисел, которые записали в порядке возрастания. Пусть A – шестое по величине среди этих чисел, а B – среднее арифметическое выбранных одиннадцати чисел.

а) Может ли $B - A$ равняться $\frac{3}{11}$?

б) Может ли $B - A$ равняться $\frac{4}{11}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение $B - A$.